

《数学大观》

二十七、费马、笛卡儿与 解析几何

主讲人：青课



解析几何是数学中最基本的分支学科之一，也是科学技术中最基本的数学工具之一。





从历史的角度看，解析几何的创建可以说是数学史上最大的创造之一。它的产生是常量数学向变量数学的转折点——在此基础上建立微积分，数学进入了更高的发展的阶段。

在现代数学教学中，解析几何学科是学习高等数学的基础。

01

“业余数学家之王”

——17世纪数学天才费马



费马 (P.de fermat, 1601—1665)

法国数学家，他博闻饱学，精通数种文字，掌握各种自然科学知识，在30岁以后才开始利用业余时间进行数学研究，被誉为“业余数学家之王”。





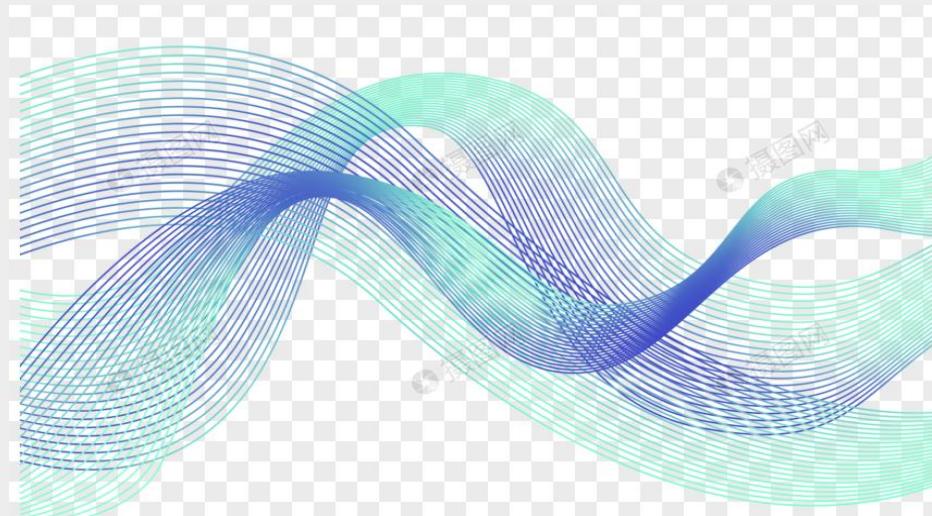
- 费马是解析几何的创立者，名副其实的发明者；
- 17世纪的数论几乎是费马的天下，费马大定理享誉世界；
- 在牛顿和莱布尼兹之前，他为微积分的创立作了大量的准备工作；
- 费马和帕斯卡一起分享了创立概率论的荣誉。

费马的《平面与立体轨迹引论》

(1629—1639) 和他在1636年与G.P.罗贝瓦 (Roberval) 等人的通信中，可以看出他在笛卡儿发表《几何学》之前，就已发现了解析几何的基本原理。



他从方程出发研究它的轨迹，发现了用代数方程表示曲线的方法。《平面与立体轨迹引论》中明确指出方程可以描述曲线，并可通过方程研究推测曲线性质。

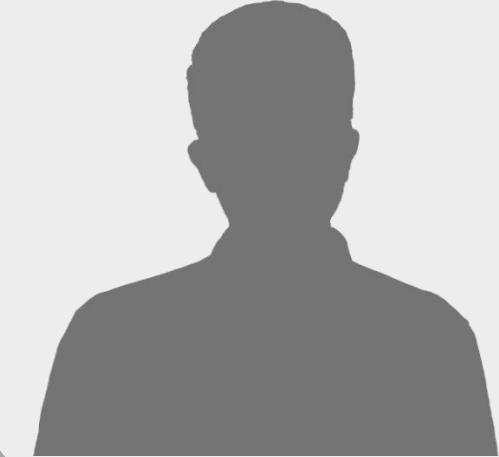
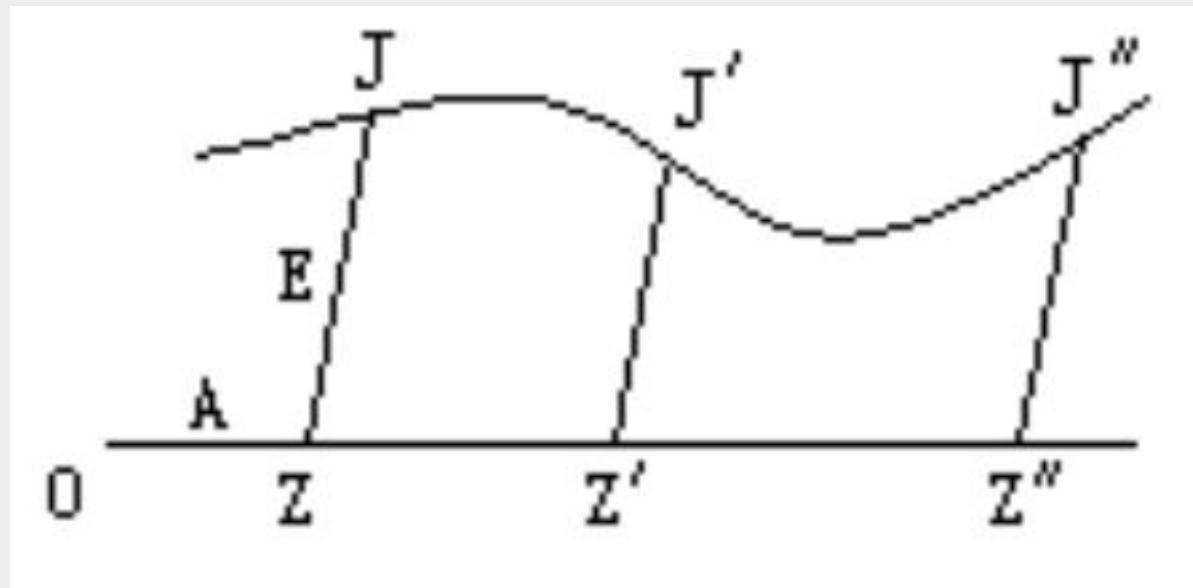




费马的解析几何思想是以古希腊阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》为出发点，他主要是对古希腊人思想的继承，因此有显著的古典色彩。

费马引进坐标，用代数方程表示几何曲线，并沿用了韦达以字母代表数类的思想，而且把变量思想用于数学研究。

费马的一般方法是坐标法。他把坐标平面上的点和一对未知数联系起来，然后在点运动成线的思想下，把曲线用方程表示出来。



费马研究了多种类型的曲线，并确定了方程，包括过原点的直线方程，任意的直线方程以及圆、椭圆、双曲线、抛物线的方程等。

但费马的解析几何是不成熟的。



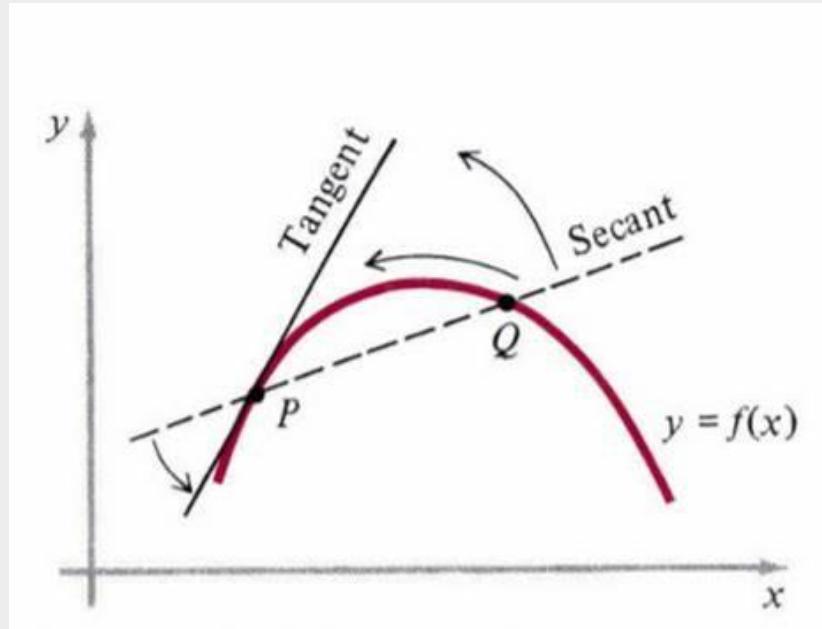


费马探索了求曲线的切线，这是初步的微积分方法。

他用自己的方法处理了许多几何问题，如求球的内接圆锥的最大体积、球的内接圆柱的最大面积、函数的极大值、极小值、曲线的长度等等，并在广泛的各种问题中从几何和分析的角度应用了无穷小量。

他的思想与方法对后来微积分学的建立奠定了重要的基础。

牛顿曾说过：“我从费马的切线作法中得到了这个方法的启示，我推广了它，把它直接地并且反过来应用于抽象的方程”。



02

“现代哲学之父”

——笛卡儿



笛卡儿是法国杰出的哲学家、物理学家和数学家，生物学的奠基人，他于1596年3月31日生于土伦的拉开哈（La haye in Tou raine），黑格尔称他为“现代哲学之父”。



笛卡儿创立了解析几何学，并提出代数基本定理和关于代数方程根的符号的“笛卡儿符号法则”等，是其最重要的数学贡献。

笛卡儿接受并继承了文艺复兴以来新的数学观，特别是他继承和发展了韦达等人的先进数学思想，充分看到了代数思想的重要性和普遍性。

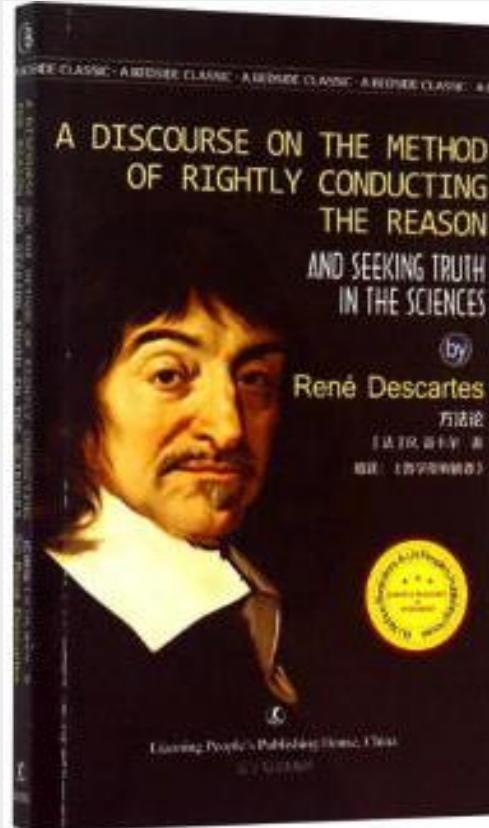


笛卡儿认为，欧几里得几何过分强调证明的技巧性，过分依赖于图形，不利于提高人们的想象力，而代数又完全受法则和公式的约束，影响人们思想的灵活性，他主张把代数和几何结合起来，用代数方法去研究几何问题。



1637年，他的《几何学》作为《方法论》一书的附录出版，此书的问世标志着解析几何的诞生。

总之，笛卡儿思想的核心是要建立一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来。



主要思想：

- 引入**坐标观念**：从天文和地理的经纬制度出发，引入了用数对表示点的坐标，他给出的 (x, y) 相当于一种坐标系的坐标 **“变量”** 的数学思想：利用坐标法提出用曲线表示方程思想，研究二元方程 $F(x, y) = 0$ 的性质
- 用**代数方法**改造传统几何学：提出了用方程表示曲线的思想，建立了利用代数议程来表示几何曲线的更一般的方法。



03

笛卡儿和费马 工作的比较



笛卡儿和费马分享创立解析几何的殊荣，他们各自独立地创立了解析几何，他们认为：在一切领域，建立真理的方法就是数学方法。

在解析几何的观点（坐标观点）和用方程表示曲线的方法方面，二人的观点基本相同；但是在创立解析几何的思想上，特别是对待传统数学态度上，他们有着本质的不同。



不同点：

研究解析几何的方法

笛卡儿从研究轨迹开始，
然后找它对应的方程。
费马从方程出发，借助
于代数然后来研究轨迹。

从历史的发展看

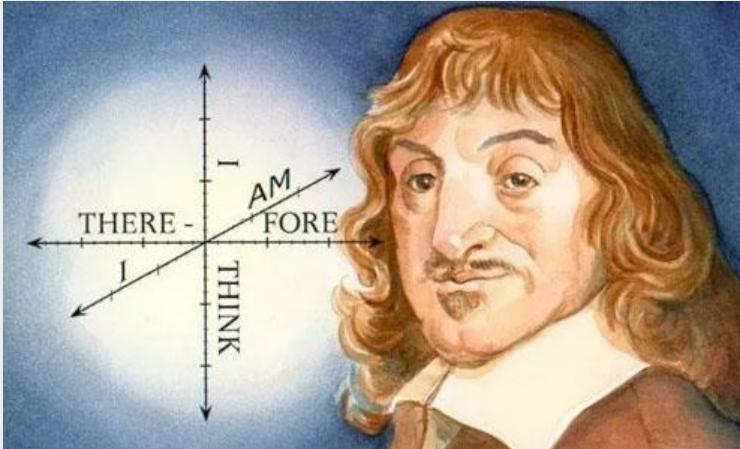
笛卡儿更具有突破性。
费马的工作主要体现出
对古希腊几何学的继承。





笛卡儿的进展表现在：

- 几何问题的代数化。
- 将“变量”引入数学



总之，笛卡儿和费马虽然共享创立解析几何的荣誉，虽然他们创立的解析几何都很不完善，但是其意义却是划时代的，它使数与形能统一起来研究，此后人们获得了沟通几何与代数的新思路，新方法。

感谢聆听

